

XVII областной турнир юных математиков
«Проектируй. Исследуй. Решай»

24 – 25 октября 2026 года

Важные указания к порядку решения и оформления исследований по заданиям
турнира юных математиков

Обращаем ваше **ВНИМАНИЕ** на то, что предлагаемые задания (далее – задачи) носят исследовательский характер (в отличие от олимпиадных задач). Полные решения и наилучшие обобщения этих задач неизвестны даже авторам, поэтому:

- во-первых, необязательно решать все задачи – необходимое количество представляемых в жюри задач – не менее 6, НО итог будет подводиться по всем представленным решенным задачам (всего предлагается 13 задач);
- во-вторых, наиболее полное решение (исследование) задачи не означает, что нужно решить ВСЕ ПУНКТЫ задачи, точнее – решаем «настолько полно насколько можем», имейте в виду, что в ряде задач интерес представляют даже *первые пункты или отдельные частные случаи заданий (их пунктов или небольших значений параметров)*;
- в-третьих, возможно (это допускается и даже приветствуется) вы сможете усилить ряд утверждений, приведенных в формулировках задач;
- в-четвертых, кроме рассмотрения исходной постановки *полезно рассмотреть свои направления*, причем ваши исследования **НЕОБЯЗАТЕЛЬНО** должны совпадать с предложениями авторов;
- **ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО КАЖДОЙ ЗАДАЧЕ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО** от других задач в электронной форме в pdf-формате (образец названия файлов «Borisov-gym1-2026-problem7-predvar» и прикрепить ссылку на задачи при регистрации, при этом:
 - **оформление каждой задачи должно начинаться С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором нужно указать номер задачи и ее название, название учреждения образования, название команды (если команда является сборной двух или нескольких учреждений), город, автора(ов) исследования (решения);
 - **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ (или на втором листе) обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте **ВАШИ СОБСТВЕННЫЕ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ** (утверждения, примеры, гипотезы);
 - **ОБЯЗАТЕЛЬНО дайте четкие ссылки на литературу и другие источники, в том числе версии *Искусственного интеллекта***, которые вы использовали при проведении исследований (в месте их использования).

Сроки представления:

- **регистрации, предварительных заявок и предварительных материалов на турнир по ссылке <https://forms.gle/V2r78D8Wqd4R2wc79> – не позднее 13.10.2026;**
- **дата жеребьёвки – 21(22).10.2026 (время и ссылка будут указаны дополнительно);**
- **официальных заявок – 24.10.2026**

Подробнее см. на сайте <https://moiro.by/> в рубрике «Работа с детьми и учащимися»/«Турниры»/«Турниры юных математиков» на странице турнира.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАНИЯ

XVII областного турнира юных математиков

«Проектируй. Исследуй. Решай»

После ознакомления со списком заданий всеми участниками турнира, возможны дополнения и изменения к заданиям. Просьба сверить окончательный вариант заданий 01.10.2026 по ссылке <https://uni.bsu.by> (на странице турнира)

1. Аномальные треугольники

1. Основная часть.

Пусть n – натуральное число. В треугольнике ABC назовем отрезок AA_1 n -чевианой, если $BA_1:A_1C = (BA:AC)^n$. Аналогично определяются -чевианы BB_1 и CC_1 . Треугольник ABC назовем n -аномальным, если $AA_1 = BB_1 = CC_1$, но при этом треугольник не является правильным.

- 1) Докажите, что -чевианы треугольника пересекаются в одной точке и найдите формулы, выражающие длины n -чевиан.
- 2) Выполняется ли следующий признак равенства треугольников (по трем -чевианам): если в двух треугольниках равны соответствующие n -чевианы, то треугольники равны?
- 3) При каких n существуют -аномальные треугольники?
- 4) Пусть $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 1$. Какую наименьшую (наибольшую) площадь может иметь -аномальный треугольник.
- 5) Найдите наименьшее/наибольшее значение угла -аномального треугольника.

2. Обобщения.

- 1) Исследуйте аналогичную задачу в гиперболической и сферической геометриях.
- 2) Существуют ли геометрические системы, в которых не бывает аномальных треугольников?
- 3) В евклидовой, сферической и гиперболической геометриях определите для каких значений n существуют -аномальные треугольники второго рода, т.е.

2. Многоугольники, линейка и многогранники

Боря умеет выполнять следующие действия:

- а) По двум точкам A , B из заданного набора определить, лежат ли остальные точки строго по одну сторону от прямой AB или нет.
- б) Производить математические вычисления.
- с) Измерять расстояние между точками.

С помощью этих действий он хочет установить свойства заданной фигуры, т.е. за конечное число таких действий, где каждое последующее он может выбирать на основе результатов предыдущих, определить, обладает ли фигура заданным свойством или нет.

1. Боря нарисовал на листе бумаги 4-х угольник $ABCD$. Может ли он установить, что $ABCD$ – квадрат? В случае положительного ответа на вопрос, какое минимальное число измерений ему для этого потребуется?
2. Ответьте на вопросы пункта 1, когда Боря хочет установить, что $ABCD$:
 - 2.1. прямоугольник;
 - 2.2. ромб;
 - 2.3. параллелограмм;

- 2.4. трапеция.
3. Ответьте на вопросы пункта 1, когда
- 3.1. Дан пятиугольник $ABCDE$ и Боря хочет установить, что он правильный.
- 3.2. Дан шестиугольник $ABCDEF$, Боря хочет установить, что он правильный.
- 3.3. Дан n -угольник и Боря хочет установить, что он правильный.

Саша умеет по точкам A, B, C из данного набора определять, лежат ли они на одной прямой, в случае отрицательного ответа, определять, какие точки лежат в плоскости ABC и для них выполнять действие а) Бори, а также определять для оставшихся точек, лежат ли они по одну сторону от плоскости ABC или нет. Также Саша умеет выполнять действия б) и с) Бори.

4. Саша скрутил из проволоки многогранник $ABCDEFGH$. хочет установить, что это куб. Сможет ли он это сделать? В случае положительного ответа на вопрос, какое минимальное число измерений ему для этого потребуется?
5. Ответьте на вопросы пункта 4, когда Саша хочет установить, что $ABCDEFGH$:
- 5.1. параллелепипед;
- 5.2. прямоугольный параллелепипед;
- 5.3. правильная 7-угольная пирамида.
6. Ответьте на вопросы пункта 4, когда Саша хочет установить, что сделанный им многогранник:
- 6.1. тетраэдр;
- 6.2. октаэдр;
- 6.3. додекаэдр;
- 6.4. икосаэдр;
- 6.5. правильная n -угольная пирамида.
7. Предложите свои обобщения.

3. Факториалы и многочлены

1. Найдите все решения уравнения $n! = x^2 - 1$ при $n \leq 10$.
2. Докажите, что уравнение $n! = x^2 - c$ не может иметь бесконечно много решений (n, x) в натуральных числах, когда
- а) $|c|$ не является полным квадратом;
- б) c не является полным квадратом.
3. Докажите, что уравнение $n! = x^a$ не может иметь бесконечно много решений (n, x) в натуральных числах, когда
- а) $a = 2$;
- б) $a \in \mathbb{N}$ и $a > 1$.
4. Докажите, что уравнение $n! = x^a y^b$ может иметь бесконечно много решений (n, x) в натуральных числах, когда $(a - 1)(b - 1) = 0$ для целых неотрицательных a и b .
5. Когда уравнение $n! = ax^2 + bx + c$ не может иметь бесконечно много решений (n, x) в натуральных числах для целых a, b, c ?
6. Докажите, что при любом фиксированном натуральном N уравнение
- а) $n! = x^2 + y^2$; б) $n! = x^2 + xy + y^2$

не может иметь бесконечно много решений в целых (x, y) , для которых $\text{НОД}(x, y) \leq N$.

Пусть $\Phi_n(x)$ — циклотомический многочлен (многочлен деления круга). Через $\Phi_n(a, b)$ будем обозначать обобщённый циклотомический многочлен, а именно

$$\Phi_n(a, b) = b^{\varphi(n)} \Phi_n(a/b),$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера.

7. Докажите, что

а) $n! = \Phi_k(x)$ не может иметь бесконечно много решений (n, x) в целых числах ($n \geq 0$), для натурального числа $k > 2$.

б) $n! = \prod_{i=1}^k \Phi_{s_i}(x_i)$ не может иметь бесконечно много решений $(n, x_1, \dots, x_k)$ в целых числах ($n \geq 0$), для натурального числа $k \geq 1$ и натуральных чисел $s_1, \dots, s_k$, больших 2.

в) $n! = \prod_{i=1}^k \Phi_{s_i}(a_i, b_i)$ не может иметь бесконечно много решений $(n, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k)$ в целых числах таких, что $\text{НОД}(a_i, b_i) \leq N$ для $i = 1, 2, \dots, k$, для натуральных чисел $k \geq 1$, N и натуральных чисел $s_1, \dots, s_k$, больших 2.

г) $n! = \prod_{i=1}^k \Phi_{s_i}(a_i, b_i)$ не может иметь бесконечно много решений $(n, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k)$ в целых числах ($n \geq 0$), для $i = 1, 2, \dots, k$, для натурального числа $k \geq 1$ и натуральных чисел $s_1, \dots, s_k$, больших 2.

8. Рассмотрите уравнение $n! = P(x)$ для целозначного многочлена или многочлена с целыми коэффициентами $P(x)$. Попробуйте найти не перечисленные семейства многочленов $P(x)$ таких, что это уравнение имело только конечное число решений (n, x) в целых числах ($n \geq 0$).

9. Предложите свои идеи и направления исследования и исследуйте их.

4. Рассадки и новые знакомства

За столом некоторой формы имеется n мест. Форма стола определяет, какие из мест являются соседними. Имеется n гостей, которые рассаживаются на эти места. Какое наибольшее количество раз их можно рассадить так, что ни одна рассадка не повторяется (две рассадки считаются разными, если хотя бы на одном месте сидят разные гости) и при этом выполняется одно из следующих условий:

А) любая пара гостей оказывается на соседних местах не более k раз;

Б) для любого гостя множество его соседей будет одним и тем же не более k раз?

Рассмотрите следующие пункты.

1. Докажите, что ответом на вопрос задачи при выполнении условия А, если стол круглый, $n = 3$, $k = 1$, будет число 1.

2. Докажите, что ответом на вопрос задачи при выполнении условия А, если стол круглый, $n = 7$, $k = 1$, будет число 3.

3. Докажите, что ответом на вопрос задачи при выполнении условия А, если стол круглый, число n простое и не меньше 3, $k = 1$, будет число $\frac{n-1}{2}$.

4. Докажите, что ответом на вопрос задачи при выполнении условия, А если стол круглый, число n **нечётное** и не меньше 3, $k = 1$, будет число $\frac{n-1}{2}$.

5. Найдите ответ на вопрос задачи при выполнении условия А, если стол круглый, число n чётное большее 2, $k = 1$.
6. Найдите ответ на вопрос задачи при выполнении условия А, если стол круглый, $k = 2$. Рассмотрите разные случаи значений n .
7. Найдите ответ на вопрос задачи при выполнении условия А, если стол прямоугольный и все места за столом расположены с одной его стороны. Рассмотрите разные случаи значений n и k .
8. Найдите ответ на вопрос задачи при выполнении условия А, если стол прямоугольный и все места за столом расположены с двух его параллельных сторон стороны. Количество мест с разных сторон отличается не более чем на один. Места находящиеся с разных сторон стола не считаются соседними. Рассмотрите разные случаи значений n и k .
9. Решите пункты 5–8 при выполнении условия Б.
10. Предложите свои обобщения и направления в этой задаче и исследуйте их.

5. Путешествия по расписанию

Для связного графа G определим его расписание как конечную последовательность множеств (M_n) , где каждое M_i является некоторым подмножеством множества рёбер $E(G)$. Также считаем, что в каждой вершине графа изначально находится путешественник, который планирует посетить некоторую другую вершину. В любой из дней, начиная с первого, путешественник может или остаться в текущей вершине, или переместиться в смежную с ней вершину по соединяющему их ребру. При этом ребро доступно для перемещения в i -ый день только если оно содержится в M_i из расписания графа. В каждый из дней любой путешественник может совершить не более одного перемещения. Расписание графа считается хорошим, если по его истечению каждый путешественник, независимо от того, какую вершину он хотел посетить, сможет в неё добраться. Под длиной расписания будем подразумевать количество множеств в последовательности (M_n) .

1. а) Для каких графов существует хорошее расписание, в котором каждое ребро графа встречается не более чем в одном из множеств M_i ?

б) Для каких графов существует хорошее расписание, в котором каждое ребро графа встречается не более чем в двух из множеств M_i ?

Пусть $d(G)$ – наименьшая возможная длина хорошего расписания графа G .

2. Найдите для графа G хорошее расписание длины $d(G)$, в котором значение $\sum_{i=1}^{d(G)} |M_i|$ минимально возможно среди всех хороших расписаний длины $d(G)$, если:

а) $G = K_n$

б) $G = P_n$

в) $G = C_n$

г) G – дерево

д) G – любой граф

Назовём расписание графа экономным, если среди всех хороших расписаний данного графа его значение $\sum_{i=1}^{d(G)} |M_i|$ наименьшее.

3. Найдите для графа G экономное расписание, если:

а) $G = K_n$

б) $G = P_n$

в) $G = C_n$

г) G – дерево

д) G – любой граф

4. а) Для фиксированного натурального k найдите наибольшее натуральное t , что для любого графа G , у которого $d(G) = k$, любое экономное расписание будет иметь длину не меньше t .

б) Для фиксированного натурального k опишите множество всех таких графов G , у которых $d(G) = k$ и существует экономное расписание длины t , найденного в пункте 4.а)?

5. Существует ли такой граф, в котором для любого набора пожеланий путешественников (знаем заранее, какой путешественник в какую вершину хочет попасть) можно составить своё отдельное экономное расписание меньшей длины, чем самое короткое экономное расписание данного графа?

Назовём хорошее расписание безопасным, если любой путешественник гарантированно сможет добраться в любую вершину даже при том условии, что ровно в один случайный день путешественнику может быть направлен запрет на перемещение в другую вершину (об этом запрете он узнает непосредственно в начале дня).

6. Исследуйте вопрос о нахождении безопасных расписаний с минимальным значением $\sum_{i=1}^{d(G)} |M_i|$ для различных видов графов.

7. Предложите свои обобщения и направления исследования.

6. Сквозные множества

1. Волшебник из-за своей заурядности привязал незаурядного мальчика Сашу к множеству точек S на плоскости. Волшебник раскрашивает это множество в два цвета. Чтобы Саше освободиться, ему нужно найти три одноцветные точки, образующие прямоугольный треугольник. Если Саша способен сделать это при любом способе раскраски, то множество S называют *сквозным*.

Являются ли сквозными следующие множества:

- окружность;
- эллипс;
- граница равностороннего треугольника;
- граница правильного n -угольника.

2. Исследуйте конечные сквозные множества.

- Покажите, что существует хотя бы одно конечное сквозное множество.
- Существует ли сквозное множество, содержащее ровно 9 точек? 8 точек?
- Найдите минимальное возможное число точек в сквозном множестве.

3. Исследуйте графики многочленов.

- Существует ли многочлен, чей график является сквозным множеством?
- Если да, найдите (или оцените) минимальную возможную степень такого многочлена.

4. Исследуйте графики других функций.

- Докажите, что график строго монотонной функции не может являться сквозным множеством.
- Ответьте на аналогичный вопрос, если функция имеет ровно два промежутка монотонности. А если 100?

- с. Найдите (или оцените) наименьшее k , для которого существует функция с k промежутками монотонности, чей график является сквозным множеством.
- II. Мальчик сказал, что волшебник банален. Тот разозлился и решил поменять условие освобождения. Теперь Саше необходимо найти не прямоугольный треугольник с вершинами одного цвета, а одноцветную фигуру, подобную фигуре Φ . *Под фигурой понимаем конечное или бесконечное множество точек на плоскости.*
1. Для каких конечных фигур Φ существует соответствующее сквозное множество?
 2. Попробуйте найти необходимое и достаточное условия на фигуру Φ , при которых для нее существует соответствующее сквозное множество.
 3. Исследуйте аналогичные вопросы, если Саша должен найти одноцветную фигуру, конгруэнтную Φ .
- III. Предложите свои обобщения.

7. Степени и цифры

Для натурального числа n через $S(n)$ обозначим сумму цифр его десятичной записи. Если f — функция, принимающая натуральные значения при натуральных значениях аргумента, положим

$$S(f) = \{ S(f(n)) : n \in \mathbb{N} \}.$$

Таким образом, $S(f)$ — множество всех сумм цифр, встречающихся среди значений функции f .

1. Принадлежат ли числа 2025 и 2026 множеству $S(x^2)$?
2. Опишите множество $S(x^2)$.
3. Исследуйте множество $S(x^3)$.
4. Исследуйте множества $S(x^k)$ в зависимости от натурального числа k .
5. Пусть $N \in S(x^k)$. Обозначим через $L_k(N)$ наименьшее количество цифр натурального числа n , для которого $S(n^k) = N$. Исследуйте величину $L_k(N)$: получите верхние и нижние оценки в зависимости от N и k .
6. Пусть теперь числа записываются в системе счисления с основанием $b \geq 2$. Через $S_b(n)$ обозначим сумму цифр числа n в этой системе счисления и аналогично определим множество $S_b(f)$. Исследуйте множества $S_b(x^k)$ в зависимости от b и k .
7. Исследуйте множества $S(P)$ для различных многочленов $P(x)$ с целыми коэффициентами, принимающих натуральные значения при натуральных значениях аргумента.
8. Могут ли для различных натуральных k и ℓ совпадать множества $S_b(x^k)$ и $S_b(x^\ell)$? Исследуйте также возможные включения между этими множествами.
9. Предложите свои обобщения и направления исследования.

8. Параболы и середины

Под параболой здесь и далее понимается график функции $y = ax^2 + bx + c$. Рассмотрим две параболы Ω и ω .

Выберем на параболе Ω точку A , которая не является точкой касания этих парабол. Рассмотрим такие точки $X \in \Omega$, что середина отрезка AX лежит на параболе ω . (Таких точек X существует не более двух – докажете это!). Если такая точка X существует, назовём её *соседней* с точкой A .

Выберем на параболе Ω начальную точку A_1 , не являющуюся точкой касания. Пусть A_2 – некоторая соседняя с ней точка. Далее выберем соседнюю для A_2 точку A_3 , отличную от A_1 . Аналогично на каждом шаге $i \geq 2$ выбираем точку A_{i+1} , которая является соседней для A_i и отлична от A_{i-1} (если такая точка A_{i+1} существует и не совпадает с точкой касания).

Полученную последовательность точек $A_1, A_2, A_3, \dots$ назовём *траекторией* для парабол Ω и ω . Будем говорить, что траектория *замыкается ровно за k шагов*, если точка A_{k+1} совпадает с A_1 , причём k – наименьшее натуральное число с таким свойством.

1.1 Пусть парабола Ω задана уравнением $y = x^2$, а парабола ω – уравнением $y = -2(x + 2)^2 + 5$. Докажите, что если для некоторой начальной точки удалось построить траекторию, то она замкнётся за 3 шага.

1.2 Пусть Ω задана уравнением $y = x^2$, а ω – уравнением $y = ax^2 + bx + c$. Найдите все значения параметра a , для которых можно подобрать такие b и c , что существует траектория, замыкающаяся за 3 шага.

1.3 Докажите, что если в условиях пункта 1.2 траектория замыкается за 3 шага, то точка пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$ остаётся неподвижным и не зависит от выбора начальной точки A_1 .

1.4 Исследуйте геометрические места других центров треугольника $A_1A_2A_3$ (например, ортоцентра, центра описанной и вписанной окружностей) в условиях пункта 1.3 при фиксированных параболах и изменении начальной точки A_1 .

2.1 Пусть парабола Ω задана уравнением $y = x^2$, а парабола ω – уравнением $y = \frac{2}{3}x^2 + 25$. Докажите, что если для некоторой начальной точки удалось построить траекторию, то она замкнётся за 6 шагов.

2.2 Пусть Ω задана уравнением $y = x^2$, а ω – уравнением $y = ax^2 + bx + c$. Найдите все значения a , для которых можно подобрать такие b и c , что существует траектория, замыкающаяся за 6 шагов.

2.3 Аналогично пункту 1.3 исследуйте ГМТ центра масс шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

3.1 Докажите, что если для данных парабол Ω и ω существует хотя бы одна траектория, замкнувшаяся за k шагов, то и любая другая траектория (которую можно продолжить до $k + 1$ точки) замкнётся за k шагов.

3.2 Пусть Ω задана уравнением $y = x^2$, а ω – уравнением $y = ax^2 + bx + c$. Найдите (в зависимости от k) все значения параметра a , при которых существуют такие b и c , что

существует траектория, замыкающаяся за k шагов.

3.3 Аналогично пункту 1.3 исследуйте ГМТ центра масс k -угольника $A_1A_2 \dots A_k$.

4.1 Исследуйте аналогичную задачу, заменив параболы на другие конические сечения (например, две окружности, два эллипса или гиперболы). Сохранятся ли свойства замыкания траекторий?

4.2 Предложите и исследуйте свои обобщения задачи (например, требование, чтобы на параболе ω лежала не середина отрезка AX , а точка, делящая его в заданном отношении; многомерные аналоги задачи и т.п.).

9. Король ребусов

В летнем математическом лагере отдыхают n школьников. Некоторые из них дружат между собой (считаем дружбу взаимной, а сеть знакомств – связной). Роман придумал невероятно интересный ребус и хочет, чтобы его узнали все дети в лагере.

Каждый день в лагере проходит следующим образом:

1. **Утром** каждый школьник, который *уже* знает ребус, рассказывает его всем своим друзьям. (В самое первое утро лагеря ребуса не знает никто, поэтому никто никому ничего не рассказывает).
2. **Вечером** Роман выбирает ровно одного любого школьника в лагере, который не знает ребус, и лично сообщает ему условие.

Роман хочет растянуть удовольствие, поэтому выбирает школьников так, чтобы процесс длился как можно дольше. Пусть G — граф дружб детей. Обозначим через $P(G)$ – максимальное количество дней.

1. Найдите точное значение $P(G)$ для лагеря из n человек, если дети дружат следующим образом:
 - а) Дети стоят в одной длинной шеренге, каждый дружит только с соседями справа и слева.
 - б) Дети стоят в хороводе, каждый дружит только с соседями.
 - в) Дети представляют собой обобщенное колесо, т.е. есть спицы длины L , которые сходятся в одной точке и обод длины k .
2. Найдите все возможные значения $P(G)$ при фиксированном n .
3. Докажите, что для любого графа знакомств G можно за полиномиальное от n время найти такую стратегию Романа, при которой процесс распространения ребуса продлится не менее $0,5 \cdot P(G)$ дней.
4. Докажите, что для любого графа знакомств G можно за полиномиальное от n время найти подграф-дерево T , содержащий все вершины графа G , такой что $P(T) \geq P(G)$.

Дальше Роман решил, что надо разнообразить этот процесс и договорился,

чтобы некоторые пары детей (v_i, v_j) , которые дружат ни в какой момент не рассказывали его друг другу, тем самым ребус распространяется по подграфу H (он всё также связный).

5. Пусть $d_G(u, v)$ — длина кратчайшего пути между вершинами в графе G , известно, что для любых u, v выполнено $d_H(u, v) \leq d_G(u, v) + 1$. Для каких констант C для любых G и H выполнено неравенство $P(H)/P(G) \leq C$?
6. Пусть Роман договорился только с одной парой детей (v_i, v_j) , то есть H получается из G удалением лишь одного ребра. Для каких констант C в этом случае для любых G и H выполнено неравенство $P(H)/P(G) \leq C$?
7. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и выполнены сразу оба условия: H получен удалением одного ребра из G и для любых u, v выполнено $d_H(u, v) \leq d_G(u, v) + k$. Для каких констант, возможно зависящих от k , $C_1(k)$, $C_2(k)$ можно гарантировать для любых G и H выполнено неравенство $P(H)/P(G) \leq C_1$ и $P(H) - P(G) \leq C_2$?
8. Ответьте на вопрос пункта 7, если H получен удалением не более чем s рёбер, вместо одного ребра.
9. Предложите свои обобщения и другие направления исследования в задаче и изучите их.

10. Язык Ши

Археологи раскопали древнее поселение, пользовавшееся языком Ши. Язык Ши состоит из $2n + 1$ буквы ($n \geq 1$), которые мы обозначим

$$a_{-n}, a_{-n+1}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n.$$

Словом называется конечная последовательность букв языка Ши (в том числе пустая). Слова X и Y называются *соседями*, если существуют такие слова C и D , для которых выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- слова X и Y — это в каком-то порядке слова CD и $Ca_k a_{n-k} D$ для некоторого $0 \leq k \leq n$;
- слова X и Y — это в каком-то порядке слова CD и $Ca_{-k} a_{k-n} D$ для некоторого $0 \leq k \leq n$;
- слова X и Y — это в каком-то порядке слова CD и $C \underbrace{a_k \dots a_k}_n D$ для некоторого $-n < k < n$ такого, что $k \neq 0$.

Будем говорить, что слова X и Y *значат одно и то же*, если существует такая последовательность слов $X = X_1, X_2, X_3, \dots, X_{k-1}, X_k = Y$, в которой слова X_i и X_{i+1} соседи для всех $i = 1, 2, \dots, k-1$.

Слово A назовём *коротким*, если оно значит тоже самое, что и какое-то однобуквенное слово. Остальные слова языка Ши назовём *длинными*.

0. Для любого ли слова C в языке Ши существует слово D такое, что слова CD и пустое слово значат одно и то же?

- В зависимости от n определите, верно ли, что в языке Ши существует:
 - бесконечно много коротких слов;
 - бесконечно много длинных слов?
- Докажите, что при $n = 4$ слова $a_1 a_1$ и $a_3 a_3$ значат одно и то же.
- В зависимости от n определите, значат ли одно и то же слова a_i и a_j , если:
 - $i = -n, j = n$;
 - $i = 0, j = 1$;
 - $i = 0, j = n$;
 - i и j – произвольные индексы, для которых $-n \leq i < j < n$?
- Найдите все пары (n, k) , $|k| \leq n$, целых чисел, для которых слово $a_1 a_k$ является коротким в языке Ши.
- Предположим, что пустое слово и слово $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$ значат одно и то же в языке Ши для некоторых индексов $i_1, i_2, \dots, i_k$.
Верно ли, что $i_1 + i_2 + \dots + i_k$ делится на n ?
- В зависимости от $n \geq 2$ определите, значат ли слова $a_1 a_2$ и $a_2 a_1$ одно и то же.
Для произвольного слова A определим его *норму* $\|A\|$ как наименьшее возможное число $k \geq 0$, для которого слово A значит тоже самое, что и некоторое k -буквенное слово.
Будем называть слово A *ясным*, если оно состоит из $\|A\|$ букв.
- Бесконечно ли много ясных слов в языке Ши?
- Оцените количество ясных слов в языке Ши с нормой k .
- Предложите свои обобщения по изучению свойств языка Ши и исследуйте их.

11. Хорошие кратные

Напомним, что многочлен $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с вещественными коэффициентами является *кратным* многочлена $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если существует такой многочлен $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)R(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Например, $x^3 + y^3$ является кратным многочлена $x + y$, потому что имеет место равенство $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Многочлен $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, являющийся кратным многочлена $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, назовём *-хорошим*, если многочлен $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$ не равен нулевому многочлену и существует такой многочлен $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которого

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = S(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k).$$

- Найдите все пары (n, m) натуральных чисел, для которых многочлен

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m$$

является кратным многочлена $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Можете начать изучение данного пункта с частных случаев, например, при $n = 2$ или $m = 2$.

- а) Докажите, что для любого ненулевого многочлена $Q(x)$ многочлен $P(x) = Q(x)Q(-x)$ является 2-хорошим кратным многочлена $Q(x)$.

- б) Докажите, что произвольный многочлен $Q(x)$ можно представить в виде

$$Q(x) = R_0(x^3) + xR_1(x^3) + x^2R_2(x^3)$$

для некоторых многочленов R_0, R_1, R_2 .

- в) Дан произвольный ненулевой многочлен $Q(x)$. Пользуясь равенством

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc,$$

докажите, что существует 3-хороший кратный многочлен $Q(x)$.

3. Верно ли, что для любого ненулевого многочлена $Q(x, y)$ существует -хороший кратный многочлен $Q(x, y)$, если:

а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) n – произвольное натуральное число?

4. Ответьте на вопрос предыдущего пункта для произвольного ненулевого многочлена от k переменных.

5. Предположим, что ненулевой многочлен $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

а) имеет степень не больше d ;

б) имеет степень не больше d по каждой из переменных

и существует -хороший многочлен $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, кратный $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Среди всех таких многочленов $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выберем тот, у которого степень наименьшая возможная (обозначим её $d(Q)$, так как в общем случае она может зависеть от исходного многочлена $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$).

Можете ли вы оценить $d(Q)$ через d , n и k для произвольного многочлена $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$? Например, можно ли утверждать, что $d(Q) \leq (dnk + 1)^{10}$ для любого исходного многочлена $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$?

6. Предложите свои обобщения и исследуйте их.

12. Последовательности и множества

Дано множество S натуральных чисел, содержащее хотя бы два элемента. Последовательность (a_i) назовём S -правильной, если $a_1 = 0$ для любого натурального числа i разность $a_{i+1} - a_i$ является числом из множества S .

1. Дано натуральное число k . Пусть $S = \{1, 2\}$. Найдите наименьшее натуральное число n , для которого найдутся такие три S -правильные последовательности, что для любых двух из них среди чисел от 1 до n найдутся хотя бы k чисел, принадлежащих этим двум последовательностям и не принадлежащих третьей.
2. Даны натуральные числа k, r, ℓ . Пусть $S = \{1, 2, 3, \dots, r\}$. Найдите наименьшее натуральное число n , для которого найдутся такие $r\ell + 1$ S -правильная последовательность, что для любых ℓ из них среди чисел от 1 до n найдутся хотя бы k чисел, принадлежащих этим ℓ последовательностям и не принадлежащих остальным.
3. Даны натуральные числа k, r . Пусть $S = \{1, r\}$. Найдите наименьшее натуральное число n , для которого найдутся такие три S -правильные последовательности, что для любых двух из них среди чисел от 1 до n найдутся хотя бы k чисел, принадлежащих этим двум последовательностям и не принадлежащих третьей.
4. Даны натуральные числа k, r, ℓ, m , причём $\ell \leq m$. Пусть $S = \{1, 2, 3, \dots, r\}$. Найдите наименьшее натуральное число n , для которого найдутся такие m S -правильных последовательностей, что для любых ℓ из них среди чисел от 1 до n найдутся хотя бы k чисел, принадлежащих этим ℓ последовательностям и не принадлежащих остальным.
5. Даны натуральные числа k, ℓ, m , причём $\ell \leq m$. Для данного произвольного множества S оцените наименьшее натуральное число n , для которого найдутся такие m S -правильных последовательностей, что для любых ℓ из них среди чисел от 1 до n найдутся хотя бы k чисел, принадлежащих этим ℓ последовательностям и не принадлежащих остальным. Например, в записи полученных при оценке выражений можно использовать значения наибольшего и наименьшего элементов S .

6. Предложите свои обобщения и направления исследования и изучите их.

13. Теория против практики

Представленная задача, несёт под собой некую философию, которую мы расскажем в этом абзаце, настоящее условие и формализация начинается со следующего. Уже 55 лет как открыт вопрос о равенстве классов сложности вычисления P и NP . Если равенства нет, во что в основном верят люди, то в мире существуют алгоритмические задачи, которые нельзя решать за быстрое время. На практике задачи из NP возникают же довольно часто и для практических целей зачастую достаточно хорошо приблизить решение на конкретном примере, без точности и гарантий на приемлемость ошибки. О том, как приближать ответы на практике занимается дискретная оптимизация. Одна из задач, которые она изучает это правильная покраска графа, которая определена далее. Есть масса алгоритмов, которые пишут на практике, в то время как классическая теория графов скорее даёт обратные оценки, что детерминированное приближение ответа на произвольном графе NP -трудно. Эти результаты немного конфликтуют друг с другом и скорее основаны на том, что графы из реальной жизни могут быть далеко не произвольными, однако интересный вопрос в том, можно ли добиться какой-нибудь гарантии. Об этом и задача.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$. Раскраской графа G назовём раскраску его вершин таким образом, что любые две вершины, имеющие общее ребро, имели разные цвета. Обозначим за $\chi(G)$ минимальное количество цветов, необходимое чтобы покрасить граф G .

Пусть задана некоторая перестановка вершин. Будем идти слева направо и присваивать каждой вершине минимальный возможный цвет, не противоречащий с её уже покрашенными соседями. Такой алгоритм раскраски назовём *жадным*.

Рассмотрим следующий алгоритм: алгоритм начинает с перестановки вершин $1, 2, \dots, n$, запускает на ней жадный алгоритм и выделяет цветовые классы. Новая перестановка строится следующим образом: определяется новый порядок цветовых классов, вершины одного цветового класса ставятся подряд, внутри одного цветового класса сохраняется относительный порядок из старой перестановки. После чего алгоритм повторяется с новой перестановки (подумайте почему число цветов может уменьшиться от этого). Назовём его алгоритм A .

Новый порядок перестановок зависит от рассматриваемого пункта. Среди них выделим две операции. *Добрый оракул* даёт нам такой шаг, чтобы мы получили наилучший результат за наилучшее время. *Злой оракул* даёт нам такой шаг, чтобы мы получили результат как можно хуже (для наших целей, то есть если мы минимизируем время, то оракул даст самое долгое, если ответ, то с самым плохим ответом).

Пусть есть некоторый алгоритм B покраски графа (не факт что в минимальное число цветов). Через $\chi_B(G)$ обозначим число цветов в покраске графа G алгоритмом B .

Ошибкой алгоритма B называется функция $f(n) = \max_{G: |V(G)|=n} \frac{\chi_B(G)}{\chi(G)}$.

1. Пусть алгоритм A всегда переставляет цветовые классы от большего по числу вершин к меньшему, в случае равенства раньше идёт класс с меньшим номером, а останавливается, если перестановка не отличается от перестановки шагом ранее.

а) Докажите, что такой алгоритм гарантированно остановится на любом графе.

б) Докажите, что он гарантированно остановится за полиномиальное время, иначе говоря существует такой многочлен P от числа вершин, что количество перестановок из которых запустится жадный алгоритм не превышает $P(V(G))$ для любого графа.

2. Пусть теперь алгоритм A может переставить блоки от большего к меньшему либо от меньшего к большему (при равенстве всё ещё раньше класс с меньшим номером). Какой именно из переходов применить сообщает оракул. Останавливается A теперь если встретит перестановку, которая уже встречалась ранее, не обязательно на прошлом шагу, понимает он это за $O(1)$. а) Докажите, что при злом оракуле алгоритм может работать сверх полиномиальное время (то есть для любого полинома от числа вершин найдётся граф, количество шагов которого больше чем $P(V)$).

б) Верно ли, что при добром оракуле ошибка алгоритма A — ограниченная функция?

3. Пусть G — двудольный граф на $2n$ ($n \geq 3$) вершинах.

а) Найдите максимальное k , что для некоторого графа G алгоритм A используя любые перестановки цветовых классов не сможет ни на каком шаге сменить блоки, а лишь способен получить перестановки получающиеся перестановкой имеющихся цветовых классов.

б) Найдите все графы, на которых это k реализуется. Любой из таких графов назовём *короной*.

Как мы видим алгоритм такого типа стал в тупик, он не смог хорошо покрасить даже двудольный граф, для которого есть несложный полиномиальный алгоритм. В таких случаях в дискретной оптимизации находят какую-то проблему в имеющемся решении, исправляют и перезапускаются ища следующую проблему, так и сделаем: усовершенствуем алгоритм.

Построим алгоритм A' покраски графа. На полученном графе запустим алгоритм A из пункта 1 и дождёмся его завершения. В его финальной перестановке можно сделать следующее изменение — взять 1 вершину и переставить в другое место перестановки, сохранив относительный порядок всех остальных. Какую вершину и куда ставить говорит оракул. После этого процедура повторяется неограниченное число раз: запускается алгоритм A до сходимости, а после идёт обращение к оракулу.

4. Пусть на графе короне алгоритм A' выбрал вершину не из первого цветового класса и поставил её на первое место. Докажите, что тогда после следующего запуска алгоритма A граф корона будет покрашен в 2 цвета.

5. Пусть в алгоритме A' оракул добрый, но может только вытягивать вершину не из первого цвета в самое начало перестановки. Докажите, что тогда за не более чем полиномиальное количество обращений к оракулу алгоритм A' сумеет покрасить путь в 2 цвета. (путём называется граф на вершинах $v_1, v_2, \dots, v_n$ и рёбрах (v_i, v_{i+1}) , $1 \leq i \leq n - 1$, стартовый порядок не зависит от индексов вершин).

Всюду далее мы разрешаем оракулу из A' лишь следующее действие: можно выбрать любую вершину графа, пусть она цвета i . Тогда её можно переставить непосредственно перед любым цветовым классом с номером от 1 до $i - 1$. Вершины цвета 1 выбирать нельзя.

Бинарным деревом называется дерево, в котором есть помеченная вершина — корень, её степень не больше 2. Остальные вершины имеют степень не больше 3.

6. Пусть G — бинарное дерево. Докажите, что A' может получить покраску G в 2 цвета за полиномиальное число обращений к оракулу.

7. Тернарным деревом называется дерево, у которого корень имеет степень не больше 3, а всякая другая вершина имеет степень не больше 4. В какое наименьшее число цветов A' способен покрасить граф за полиномиальное число обращений к оракулу?

8. Верен ли результат пункта 6 для произвольного дерева? А для произвольного двудольного графа? А если время сверхполиномиальное?

9. Предложите свои обобщения, например исследуйте алгоритм A' для графа с $\chi(G) \geq 3$, если качество покраски вас не устроит усложните алгоритм и исследуйте его. Или попытайтесь дать другие шаги оракулу в A' , например разрешить ему перетаскивать вершины только в самое начало, как в пункте 5, но вытаскивать можно несколько.